Том 29, № 145 2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-65-76
УДК 517.53

Наилучшее приближение аналитических в единичном круге функций в весовом пространстве Бергмана $\mathscr{B}_{2,\mu}$

Мухтор Рамазонович ЛАНГАРШОЕВ
ФГБВОУ ВО «Академия гражданской защиты МЧС России»
141435, Российская Федерация, Московская область, г. Химки, мкр. Новогорск, ул. Соколовская, 1А

Аннотация. В работе изучаются вопросы наилучшего приближения аналитических функций в весовом пространстве Бергмана $\mathscr{B}_{2,\mu}$. В этом пространстве для наилучших приближений аналитических в круге функций алгебраическими комплексными полиномами получены точные неравенства через обобщенные модули непрерывности высших порядков производных $\Omega_m(z^r f^{(r)}, t)$, $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}$. Для классов аналитических в единичном круге функций, задаваемых при помощи характеристики $\Omega_m(z^r f^{(r)}, t)$ и мажоранты Φ, вычислены точные значения некоторых n-поперечников. При доказательстве основных результатов настоящей работы используются методы решения экстремальных задач в нормированных пространствах аналитических в круге функций, метод Н. П. Корнейчука оценки верхних граней наилучших приближений классов функций подпространством фиксированной размерности и метод оценки снизу n-поперечников функциональных классов в различных банаховых пространствах.

Ключевые слова: наилучшее полиномиальное приближение, обобщенный модуль непрерывности высшего порядка, весовое пространство Бергмана, поперечники

Для цитирования: *Лангаршоев М.Р.* Наилучшее приближение аналитических в единичном круге функций в весовом пространстве Бергмана $\mathscr{B}_{2,\mu}$ // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 145. С. 65–76. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-65-76

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-65-76

The best approximation of analytic in a unit circle functions in the Bergman weight space $\mathscr{B}_{2,\mu}$

Mukhtor R. LANGARSHOEV
Civil Defence Academy of EMERCOM of Russia
1A Socolovskaya St., Novogorsk Microdistrict, Khimki, Moscow Region 141435, Russian Federation

Abstract. The paper studies the issues of the best approximation of analytical functions in the Bergman weight space $\mathscr{B}_{2,\mu}$. In this space, for best approximations of functions analytic in the circle by algebraic complex polynomials we obtain the exact inequalities by means of generalized modules of continuity of higher order derivatives $\Omega_m(z^r f^{(r)}, t)$, $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}$. For classes of functions analytic in the unit circle defined by the characteristic $\Omega_m(z^r f^{(r)}, t)$, and the majorant Φ, the exact values of some n-widths are calculated. When proving the main results of this work, we use methods for solving extremal problems in normalized spaces of functions analytic in the circle, N. P. Korneichuk's method for estimating upper bounds for the best approximations of classes of functions by a subspace of fixed dimension, and a method for estimating from below the n-widths of function classes in various Banach spaces.

Keywords: best polynomial approximation, generalized modulus of continuity of high order, Bergman weight space, diameters

Mathematics Subject Classification: 30E05, 30E10, 42A10.

For citation: Langarshoev M.R. The best approximation of analytic in a unit circle functions in the Bergman weight space $\mathscr{B}_{2,\mu}$. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:145 (2024), 65–76. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-65-76 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Теория приближения функций является одной из наиболее интенсивно развивающихся областей математического анализа. Особое место в этой теории занимают экстремальные задачи наилучшего приближения аналитических в круге функций комплексными полиномами в различных банаховых пространствах аналитических функций. Первые точные результаты по наилучшим полиномиальным приближениям аналитических в круге функций и вычисления колмогоровских n-поперечников (определенных в [1]) получены в [2–4]. В дальнейшем эта тематика нашла свое отражение в работах [5–7] и многих других. В пространстве Бергмана указанная задача впервые была рассмотрена в [8,9], результаты были развиты в ряде работ, в частности, в [10–12]. В работе [13] было введено в рассмотрение весовое пространство Бергмана $B_p(\gamma|z|, D)$, $1 \leq p < \infty$, аналитических в единичном круге D функций $f(z)$, где $\gamma|z|$ — положительная в области D функция. В этом пространстве для наилучших приближений аналитических в круге функций алгебраическими комплексными полиномами получены точные неравенства через усредненные модули непрерывности высшего порядка производных функций в пространстве $B_{2,\gamma}$. В дальнейшем вопросы нахождения точных оценок для наилучших приближений аналитических функций через усредненные значения разных характеристик в весовом пространстве Бергмана $B_p(\gamma|z|, D)$, $1 \leq p < \infty$, рассматривались в работах [14–16] (также см. приведенную в них библиографию). В частности, в работе [16] получено обобщение результатов [13], а также вычислены значения n-поперечников классов аналитических функций.

В настоящей работе для наилучших приближений аналитических в единичном круге функций алгебраическими комплексными полиномами получены точные неравенства через усредненные значения обобщенного модуля непрерывности высших порядков производных функций в весовом пространстве Бергмана $\mathscr{B}_{2,\mu}$.

1. Основные понятия

Пусть $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг в этой плоскости и $U(\mathbb{D})$ — множество функций аналитических в $\mathbb{D}$.

Через $\mathscr{B}_{2,\mu}$, $\mu > -1$, обозначим банахово пространство Бергмана, которое состоит из всех функций $f \in U(\mathbb{D})$, для которых норма

$$\|f\|_{2,\mu} \stackrel{def}{=} \|f\|_{\mathscr{B}_{2,\mu}} = \left(\int\limits_D |f(z)|^2 dA_\mu(z)\right)^{1/2}, \tag{1.1}$$

конечна, где

$$dA_\mu(z) = (\mu+1)(1-|z|^2)^\mu dA(z),$$

$dA(z) = \dfrac{1}{\pi} dxdy$ — элемент площади и интеграл понимается в смысле Лебега.

Введем обозначение $z = x + iy = \rho e^{it}$, $0 < \rho \leq 1$, $0 < t \leq 2\pi$, норму (1.1) запишем в виде

$$\|f\|_{2,\mu} = \left(\int\limits_0^1 (\mu+1)(1-\rho^2)^\mu \mathscr{L}_2^2(\rho, f)\rho d\rho\right)^{1/2},$$

где

$$\mathscr{L}_2(\rho, f) = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Отметим, что если $\mu=0,$ то пространство $\mathscr{B}_{2,0}\overset{def}{=}\mathscr{B}_2$ является известным пространством Бергмана.

Через $\mathscr{P}_{n-1}$ обозначим множество всех комплексных алгебраических полиномов степени $\leq n-1$

$$\mathscr{P}_{n-1}=\Big\{p_n(z):\,p_n(z)=\sum_{k=0}^{n-1}a_k(f)z^k, a_k(f)\in\mathbb{C}\Big\}.$$

Величина

$$E_{n-1}(f)_{2,\mu}=\inf\{\|f-p_{n-1}\|_{2,\mu}:\,p_{n-1}\in\mathscr{P}_{n-1}\} \tag{1.2}$$

называется *наилучшим приближением функции* $f\in\mathscr{B}_{2,\mu}$ *множеством* $\mathscr{P}_{n-1}$. Равенством

$$\Omega_m(f,t)_{2,\mu}=\left\{\frac{1}{t^m}\int\limits_0^t\cdots\int_0^t\|\Delta_{\bar h}^m f(\rho e^{i\theta})\|_{2,\mu}^2dh_1\ldots dh_m\right\}^{1/2},\quad t>0, \tag{1.3}$$

где

$$\bar h=(h_1,h_2,\ldots,h_m),\quad \Delta_{\bar h}^m=\Delta_{h_1}^1\circ\cdots\circ\Delta_{h_m}^1,$$

$$\Delta_{h_j}^1 f(\rho e^{i\theta})=f(\rho e^{i(\theta+h_j)})-f(\rho e^{i\theta}),\quad j=\overline{1,m}, \tag{1.4}$$

будем определять *обобщенный модуль непрерывности* m*-го порядка функции* $f\in\mathscr{B}_{2,\mu}$ (см., например, [17, 18]).

Для любых $r\in\mathbb{Z}_+$ обычную производную r-го порядка функции $f(z)$ обозначим через $f^{(r)}(z)=d^rf/dz^r$.

Так как функция $f\in\mathscr{B}_{2,\mu}$ аналитична в $\mathbb{D}$, то из разложения f в ряд Маклорена

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(f)z^k$$

следует, что

$$f^{(r)}(z)=\sum_{k=r}^{\infty}\alpha_{k,r}c_k(f)z^{k-r},$$

где

$$\alpha_{k,r}=k(k-1)(k-2)\cdots(k-r+1)=k!\{(k-r)!\}^{-1},\quad k\geq r,\quad k\in\mathbb{N},\quad r\in\mathbb{Z}_+,$$

$c_k(f)$ — коэффициенты Маклорена функции f.

Через $\mathfrak{B}_{2,\mu}^{(r)}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ обозначим множество функций $f\in U(\mathbb{D})$ таких, что $z^rf^{(r)}\in\mathscr{B}_{2,\mu}$.

Символ

$$(u)_n=u(u+1)(u+2)\cdots(u+n-1) \tag{1.5}$$

называется *символом Похгаммера* [19].

2. Наилучшее приближение функций в пространстве $\mathscr{B}_{2,\mu}$

Лемма 2.1. *Среди произвольных полиномов* $p_{n-1} \in \mathscr{P}_{n-1}$ *наименьшее значение величине* (1.2) *в пространстве* $\mathscr{B}_{2,\mu}$ *доставляет частная сумма Тейлора* $T_{n-1}(f;z) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k(f)z^k$ *— разложения функции* $f(z)$ *в круге* $|z|<1$. *При этом*

$$E_{n-1}(f)_{2,\mu} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \frac{k!}{(\mu+2)_k} \right\}^{1/2}. \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая $p_{n-1}(z) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k z^k$, получим

$$\mathscr{L}_2^2(\rho, f - p_{n-1}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(\rho e^{it}) - p_{n-1}(\rho e^{it}) \right|^2 dt$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} |c_k(f) - a_k(f)|^2 \cdot \rho^{2k} + \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \cdot \rho^{2k}.$$

Поскольку

$$\inf \left\{ \mathscr{L}_2^2(\rho, f - p_{n-1}) : p_{n-1}(z) \in \mathscr{P}_{n-1} \right\} = \mathscr{L}_2^2\left(\rho, f - T_{n-1}(f,z)\right) = \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \rho^{2k},$$

то из равенства (1.2), с учетом (1.5) будем иметь

$$E_n(f)_{\mathscr{B}_{2,\mu}} = \inf \left\{ \|f - p_{n-1}\|_{2,\mu} : p_{n-1} \in \mathscr{P}_{n-1} \right\}$$
$$= \left\{ \int_0^1 (\mu+1)(1-\rho^2)^{\mu} \mathscr{L}_2^2\left(\rho, f - T_{n-1}(f;z)\right) d\rho \right\}^{1/2}$$
$$= \left\{ \int_0^1 (\mu+1)(1-\rho^2)^{\mu} \left(\sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \cdot \rho^{2k} \right) d\rho \right\}^{1/2} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \frac{k!}{(\mu+2)_k} \right\}^{1/2}.$$

Таким образом, установлено равенство (2.1) и лемма доказана. □

Теорема 2.1. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, $0 < h \le \pi/n$, $\varphi(t)$ *— весовая на* $(0,h)$ *функция. Тогда для любого* $0 < p \le \infty$ *справедливо неравенство*

$$E_{n-1}(f)_{2,\mu} \le \frac{\left\{ \int_0^h \Omega_m^p(z^r f^{(r)}, t)_{2,\mu} \varphi(t) dt \right\}^{1/p}}{2^{m/2} \alpha_{n,r} \left\{ \int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2} \varphi(t) dt \right\}^{1/p}}. \tag{2.2}$$

Неравенство (2.2) *является точным в том смысле, что существует функция* $f_0(z) \in \mathfrak{B}_{2,\mu}^{(r)}$, *для которой оно обращается в равенство.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя равенство Парсеваля к разности (1.4), получим

$$\|\Delta_h^m f(\rho e^{i\theta})\|^2_{\mathscr{B}_{2,\mu}} = 2^m \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(f)|^2 \prod_{j=1}^{m} (1-\cos kh_j) \frac{k!}{(\mu+2)_k}. \tag{2.3}$$

Подставим соотношение (2.3) в правую часть равенства (1.3) и запишем его в виде

$$\Omega_m^2(f,t)_{2,\mu} \geq 2^m \sum_{k=1}^{\infty} |c_k(f)|^2 \frac{k!}{(\mu+2)_k} \left(1-\frac{\sin kt}{kt}\right)^m. \tag{2.4}$$

Легко показать, что для произвольной функции $f(z) \in \mathscr{B}_{2,\mu}$ такой, что $z^r f^{(r)} \in \mathscr{B}_{2,\mu}$, имеет место неравенство

$$E_{n-1}(z^r f^{(r)})_{2,\mu} \geq \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_{2,\mu}. \tag{2.5}$$

Заменим в соотношении (2.4) $f(z)$ на $z^r f^{(r)}(z)$. Используя неравенство (2.5), равенство (2.1), и учитывая тот факт, что (см. [20])

$$\max\{|\sin u|/u : u \geq nt\} = \sin(nt)/(nt), \quad 0 < nt \leq \pi/2,$$

получаем

$$\Omega_m^2(z^r f^{(r)},t)_{2,\mu} \geq 2^m \alpha_{n,r}^2 \left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^m E_n^2(f)_{2,\mu}. \tag{2.6}$$

В неравенстве (2.2) для параметра p, удовлетворяющего условию $0 < p \leq \infty$, функционал $\|\Omega_m \varphi^{1/p}\|_p$ определен соотношением

$$\|\Omega_m \varphi^{1/p}\|_p = \begin{cases} \left\{ \int\limits_0^h \Omega_m^p(z^r f^{(r)},t)_{2,\mu} \varphi(t)dt \right\}^{1/p}, & 0 < p < \infty, \\ \max\left\{\Omega_m(z^r f^{(r)},t)_{2,\mu},\, t \in (0,h]\right\}, & p = \infty, \end{cases}$$

и оно лишь при $1 \leq p \leq \infty$ является нормой. Возведем обе части неравенства (2.6) в степень $p/2$, результат умножим на $\varphi(t)$ и проинтегрируем по переменной t от 0 до h, и таким образом получим

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p\left(z^r f^{(r)},t\right)_{2,\mu} \varphi(t)dt \geq 2^{mp/2} \alpha_{n,r}^p E_{n-1}^p(f)_{2,\mu} \int\limits_0^h \left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2} \varphi(t)dt.$$

Отсюда следует неравенство (2.2).

Чтобы доказать точность неравенства (2.2), рассмотрим функцию $f_0(z) = z^n \in \mathfrak{B}_{2,\mu}^{(r)}$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $r < n$. Для этой функции из соотношений (1.2) и (1.3) имеем

$$E_{n-1}(f_0)_{2,\mu} = \left\{\frac{n!}{(\mu+2)_n}\right\}^{1/2}, \tag{2.7}$$

$$\Omega_m\left(z^r f_0^{(r)},t\right)_{2,\mu} = 2^{m/2}\alpha_{n,r}\left\{\frac{n!}{(\mu+2)_n}\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^m\right\}^{1/2}. \tag{2.8}$$

С учетом равенств (2.7) и (2.8) запишем

$$E_{n-1}(f_0)_{2,\mu} \leq \frac{\left\{\int\limits_0^h \Omega_m^p(z^r f_0^{(r)}, t)_{2,\mu}\varphi(t)dt\right\}^{1/p}}{2^{m/2}\alpha_{n,r}\left\{\int\limits_0^h \left(1-\dfrac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2}\varphi(t)dt\right\}^{1/p}}$$

$$= \frac{\left(\int\limits_0^h 2^{mp/2}\alpha_{n,r}^p\left\{\dfrac{n!}{(\mu+2)_n}\left(1-\dfrac{\sin nt}{nt}\right)^m\right\}^{p/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}{2^{m/2}\alpha_{n,r}\left(\int\limits_0^h \left(1-\dfrac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \left\{\frac{n!}{(\mu+2)_n}\right\}^{1/2}.$$

□

Из теоремы 2.1 вытекают ряд следствий.

Следствие 2.1. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N},\ \ r\in\mathbb{Z}_+,\ \ 0<p\leq\infty,\ \ 0<h\leq\pi/n,\ \ \varphi(t)\equiv 1.$ *Тогда*

$$E_{n-1}(f)_{2,\mu} \leq \frac{\left\{\int\limits_0^h \Omega_m^p(z^r f^{(r)}, t)_{2,\mu}\right\}^{1/p}}{2^{m/2}\alpha_{n,r}\left\{\int\limits_0^h \left(1-\dfrac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2}dt\right\}^{1/p}}. \tag{2.9}$$

В частности, при $p=2/m,\ \ m\in\mathbb{N}$ *из* (2.9) *имеем*

$$E_{n-1}(f)_{2,\mu} \leq \frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}}\left\{\frac{n}{nh-\mathrm{Si}(nh)}\right\}^{m/2}\left\{\int\limits_0^h \Omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, t)_{2,\mu}\right\}^{m/2}. \tag{2.10}$$

При $h=\pi/n$ *из* (2.10) *получаем*

$$E_{n-1}(f)_{2,\mu} \leq \frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}}\left\{\frac{n}{\pi-\mathrm{Si}(\pi)}\right\}^{m/2}\left\{\int\limits_0^{\pi/n} \Omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, t)_{2,\mu}\right\}^{m/2}.$$

Следствие 2.2. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N},\ \ r\in\mathbb{Z}_+,\ \ 0<p\leq\infty,\ \ 0<h\leq\pi/n,\ \ \varphi(t)=t.$ *Тогда*

$$E_{n-1}(f)_{2,\mu} \leq \frac{\left\{\int\limits_0^h t\Omega_m^p(z^r f^{(r)}, t)_{2,\mu}\right\}^{1/p}}{2^{m/2}\alpha_{n,r}\left\{\int\limits_0^h t\left(1-\dfrac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2}dt\right\}^{1/p}}. \tag{2.11}$$

В частности, при $p=2/m,\ \ m\in\mathbb{N}$ *из* (2.11) *получаем*

$$E_{n-1}(f)_{2,\mu}\leq\frac{n^m}{\alpha_{n,r}}\left\{\frac{1}{n^2h^2-4\sin^2\frac{nh}{2}}\right\}^{m/2}\left\{\int\limits_0^h t\Omega_m^{2/m}(z^rf^{(r)},t)_{2,\mu}\right\}^{m/2}. \tag{2.12}$$

При $h=\pi/n$ *из* (2.12) *имеем*

$$E_{n-1}(f)_{2,\mu}\leq\frac{n^m}{\alpha_{n,r}}\left\{\frac{1}{\pi^2-4}\right\}^{m/2}\left\{\int\limits_0^{\pi/n} t\Omega_m^{2/m}(z^rf^{(r)},t)_{2,\mu}\right\}^{m/2}.$$

3. Значения поперечников классов $W_{m,p}^{(r)}(h,\Phi)$ в пространстве $\mathscr{B}_{2,\mu}$

Пусть S — единичный шар в пространстве $\mathscr{B}_{2,\mu}$, $\mathfrak{N}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из $\mathscr{B}_{2,\mu}$, $\Lambda_n\subset\mathscr{B}_{2,\mu}$ — n-мерное подпространство, $\Lambda^n\subset\mathscr{B}_{2,\mu}$ — подпространство коразмерности n, $\mathcal{L}:\ \mathscr{B}_{2,\mu}\to\Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор и $\mathcal{L}^{\perp}:\mathscr{B}_{2,\mu}\to\Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования.

Величины

$$b_n(\mathfrak{N},\mathscr{B}_{2,\mu})=\sup\left\{\sup\left\{\varepsilon>0;\ \varepsilon S\cap\Lambda_{n+1}\subset\mathfrak{N}\right\}:\Lambda_{n+1}\subset\mathscr{B}_{2,\mu}\right\},$$

$$d_n(\mathfrak{N},\mathscr{B}_{2,\mu})=\inf\Big\{\sup\Big\{\inf\Big\{\|f-\varphi\|_{\mathscr{B}_{2,\mu}}:\ \varphi\in\Lambda_n\Big\}:f\in\mathfrak{N}\Big\}:\Lambda_n\subset\mathscr{B}_{2,\mu}\Big\},$$

$$\lambda_n(\mathfrak{N},\mathscr{B}_{2,\mu})=\inf\Big\{\inf\Big\{\sup\Big\{\|f-\mathcal{L}f\|_{\mathscr{B}_{2,\mu}}:\ f\in\mathfrak{N}\Big\}:\ \mathcal{L}\mathscr{B}_{2,\mu}\subset\Lambda_n\Big\}:\Lambda_n\subset\mathscr{B}_{2,\mu}\Big\},$$

$$d^n(\mathfrak{N},\mathscr{B}_{2,\mu})=\inf\Big\{\sup\Big\{\|f\|_{\mathscr{B}_{2,\mu}}:\ f\in\mathfrak{N}\cap\Lambda^n\Big\}:\Lambda^n\subset\mathscr{B}_{2,\mu}\Big\},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{N},\mathscr{B}_{2,\mu})=\inf\Big\{\inf\Big\{\sup\Big\{\|f-\mathcal{L}^{\perp}f\|_{\mathscr{B}_{2,\mu}}:\ f\in\mathfrak{N}\Big\}:\mathcal{L}^{\perp}\mathscr{B}_{2,\mu}\subset\Lambda_n\Big\}:\Lambda_n\subset\mathscr{B}_{2,\mu}\Big\},$$

называют соответственно *бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским и проекционным* n*-поперечниками в пространстве* $\mathscr{B}_{2,\mu}$.

Поскольку $\mathscr{B}_{2,\mu}$ является гильбертовым пространством, то между перечисленными n-поперечниками выполняются следующие соотношения (см. [21, с. 239]):

$$b_n(\mathfrak{N},\mathscr{B}_{2,\mu})\leq d^n(\mathfrak{N},\mathscr{B}_{2,\mu})\leq d_n(\mathfrak{N},\mathscr{B}_{2,\mu})=\lambda_n(\mathfrak{N},\mathscr{B}_{2,\mu})=\Pi_n(\mathfrak{N},\mathscr{B}_{2,\mu}). \tag{3.1}$$

Также полагаем

$$\mathscr{E}_n(\mathfrak{N}):=\sup\{E_n(f):\ f\in\mathfrak{N}\}.$$

Пусть $\Phi(u)$ $(u\geq 0)$ — произвольная непрерывная возрастающая функция такая, что $\Phi(0)=0$. Будем ее называть мажорантой.

Через $W_{m,p}^{(r)}(h,\Phi)$, где $m,r\in\mathbb{N}$, $0<p\leq\infty$, $0<h\leq\pi/n$, обозначим класс функций $f\in\mathfrak{B}_{2,\mu}^{(r)}$, удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h t\Omega_m^p\Big(z^rf^{(r)},t\Big)_{2,\mu}tdt\leq\Phi^p(u).$$

Обозначим через τ_* значение аргумента, при котором функция $\sin\tau/\tau$ достигает на полусегменте $[0,\infty)$ своего наименьшего значения. Очевидно, τ_* есть минимальный положительный корень уравнения $\dfrac{\operatorname{tg}\tau}{\tau}=1$ и $4,49<\tau_*<4,51$ (см. [18]). Положим

$$\left(1-\frac{\sin\tau}{\tau}\right)_*:=\begin{cases}1-\dfrac{\sin\tau}{\tau}, & \text{если } \ 0\le\tau\le\tau_*;\\ 1-\dfrac{\sin\tau_*}{\tau_*}, & \text{если}, \ \ \tau\ge\tau_*.\end{cases}$$

Эта функция будет играть важную роль при нахождении значения вышеперечисленных поперечников указанных классов функций.

Теорема 3.1. *Пусть $m,n,r\in\mathbb{N}$, $\quad 0<p\le\infty$ и функция Φ при любых $h\in\mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию*

$$\left(\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/n)}\right)^p\ge\left(\frac{\pi}{nh}\right)^2\frac{\displaystyle\int\limits_0^{nh}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_*^{mp/2}dt}{\displaystyle\int\limits_0^{\pi}t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt}. \tag{3.2}$$

Тогда справедливы равенства

$$\sigma_n\left(W_{m,p}^{(r)}(h,\Phi);\mathscr{B}_{2,\mu}\right)=\mathscr{E}_{n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(h,\Phi)\right)=\frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}}\left\{\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt\right\}^{-1/p}\Phi(\pi/n),$$

где $\sigma_n(\cdot)$ — любой из перечисленных выше n-поперечников. Множество мажорант Φ, для которых выполняется условие (3.2), не пусто.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенства (2.11) при $h=\pi/n$, для любого $f\in\mathfrak{B}_{2,\mu}^{(r)}$ имеем

$$E_{n-1}(f)\le\frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}}\left\{\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi}t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt\right\}^{-1/p}\cdot\left\{\frac{n^2}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi/n}t\Omega_m^p\left(z^rf^{(r)},t\right)_{2,\mu}dt\right\}^{1/p}.$$

Отсюда, согласно определению класса $W_{m,p}^{(r)}(h,\Phi)$ и в силу соотношения (3.1), получаем оценку сверху для проекционного n-поперечника

$$\begin{aligned}\Pi_n\left(W_{m,p}^{(r)}(h,\Phi);\mathscr{B}_{2,\mu}\right)&\le\mathscr{E}_{n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(h,\Phi)\right)\\ &\le\frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}}\left(\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi}t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt\right)^{-1/p}\Phi(\pi/n).\end{aligned}\tag{3.3}$$

Для получения оценки снизу бернштейновского n-поперечника введем в рассмотрение шар

$$S_{n+1}=\left\{p_n\in\mathscr{P}_{n-1}:\ \|p_n\|\le\frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}}\left[\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi}t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2}dt\right]^{-1/p}\Phi(\pi/n)\right\}$$

и покажем, что $S_{n+1}\subset W^{(r)}_{m,p}(h,\Phi)$. Действительно, для любого $p_n(z)\in\mathscr{P}_n$ из соотношения (2.4) имеем

$$\Omega_m^p\left(z^r p_n^{(r)},t\right)_{2,\mu}\leq 2^{mp/2}\alpha_{n,r}^p\Big(1-\frac{\sin nt}{nt}\Big)_*^{mp/2}\|p_n\|^p. \tag{3.4}$$

Из неравенства (3.4) для произвольного полинома $p_n\in S_{n+1}$ и любого $h\in\mathbb{R}_+$, с учетом условия (3.2), получаем

$$\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h t\Omega_m^p\left(z^r p_n^{(r)},t\right)_{2,\mu}dt\leq 2^{mp/2}\cdot\alpha_{n,r}^p\|p_n\|^p\cdot\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h t\Big(1-\frac{\sin nt}{nt}\Big)_*^{mp/2}dt$$
$$\leq\left\{\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^\pi t\Big(1-\frac{\sin t}{t}\Big)^{mp/2}dt\right\}^{-1}\Phi^p(\pi/n)\cdot\frac{1}{(nh)^2}\int\limits_0^{nh} t\Big(1-\frac{\sin t}{t}\Big)_*^{mp/2}dt\leq\Phi^p(h),$$

а это и значит, что $S_{n+1}\subset W^{(r)}_{m,p}(h,\Phi)$. Используя определение бернштейновского n-поперечника, с учетом соотношения (3.1), будем иметь

$$b_n\left(W^{(r)}_{m,p}(h,\Phi);\mathscr{B}_{2,\mu}\right)\geq b_n(S_{n+1};\mathscr{B}_{2,\mu})$$
$$\geq\frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}}\left\{\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^\pi t\Big(1-\frac{\sin t}{t}\Big)^{mp/2}dt\right\}^{-1/p}\Phi(\pi/n). \tag{3.5}$$

Из сопоставления оценки сверху (3.3) и оценки снизу (3.5) вышеперечисленных n-поперечников получаем утверждение теоремы 3.1. □

Условие (3.2) выполняется, например, для функции (см. [22]) $\Phi_0(t)=t^{\lambda/p}$, где

$$\lambda:=\frac{\pi^2}{\int\limits_0^\pi t\Big(1-\dfrac{\sin t}{t}\Big)^{mp/2}dt}-2,\quad mp/2<\alpha<mp.$$

References

[1] A. Kolmogoroff, “Uber die beste Annaherug von Funktionen einer gegebenen Funktionen klasse”, *Annals of Mathematics*, **37**:1 (1936), 107–111.

[2] К. И. Бабенко, “О наилучших приближениях одного класса аналитических функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **22**:5 (1958), 631–640. [K. I. Babenko, “Best approximations to a class of analytic functions”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **22**:5 (1958), 631–640 (In Russian)].

[3] В. М. Тихомиров, “Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений”, *УМН*, **15**:3 (1960), 81–120; англ. пер.:V. M. Tikhomirov, “Diameters of sets in function spaces and the theory of best approximations”, *Russian Math. Surveys*, **15**:3 (1960), 75–111.

[4] Л. В. Тайков, “О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций”, *Матем. заметки*, **1**:2 (1967), 155–162; англ. пер.:L. V. Taikov, “On the best approximation in the mean of certain classes of analytic functions”, *Math. Notes*, **1**:2 (1967), 104–109.

[5] М. З. Двейрин, “Поперечники и ε-энтропия классов функций, аналитических в единичном круге”, *Теория функций, функциональный анализ и их приложения*, **23** (1975), 32–46. [M. Z. Dveyrin, “Widths and ε-entropy of classes of functions that are analytic in the unit circle of functions”, *Function theory, functional analysis and their applications*, **23** (1975), 32–46 (In Russian)].

[6] С. Б. Вакарчук, “Точные значения поперечников классов аналитических в круге функций и наилучшие линейные методы приближения”, *Матем. заметки*, **72**:5 (2002), 665–669; англ. пер.:S. B. Vakarchuk, “Exact values of widths of classes of analytic functions on the disk and best linear approximation methods”, *Math. Notes*, **72**:5 (2002), 615–619.

[7] М. Ш. Шабозов, Г. А. Юсупов, “Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций”, *ДАН России*, **382**:6 (2002), 747–749; англ. пер.:M. Sh. Shabozov, G. A. Yusupov, “Best approximation and widths of some classes of analytic functions”, *Doklady Mathematics*, **65**:1 (2002), 111–113.

[8] С. Б. Вакарчук, “О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций. I”, *Укр. матем. журн.*, **42**:7 (1990), 873–881; англ. пер.:S. B. Vakarchuk, “Diameters of certain classses of functions analytic in the unit disc. I”, *Ukrainian Math. J.*, **42**:7 (1990), 769–778.

[9] С. Б. Вакарчук, “Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций”, *Матем. заметки*, **57**:1 (1995), 30–39; англ. пер.:S. B. Vakarchuk, “Best linear methods of approximation and widths of classes of analytic functions in a disk”, *Math. Notes*, **57**:1 (1995), 21–27.

[10] М. Ш. Шабозов, М. Р. Лангаршоев, “Приближение некоторых классов аналитических функций в пространстве B_p”, *Вестник ХоГУ*, **1**:1 (1999), 45–50. [M. Sh. Shabozov, M. R. Langarshoev, “Approximation of some classes of analytic functions in the space B_p”, *Vestnik KhSU*, **1**:1 (1999), 45–50 (In Russian)].

[11] М. Р. Лангаршоев, “Наилучшее приближение и значение поперечников некоторых классов функций в пространстве Бергмана”, *Докл. АН Респ. Таджикистан*, **48**:3–4 (2005), 12–17. [M. R. Langarshoev, “Best approximation and the value of the diameters of some classes of functions in Bergman space”, *Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*, **48**:3–4 (2005), 12–17 (In Russian)].

[12] М. Ш. Шабозов, “О наилучшем совместном приближении функций в пространстве Бергмана B_2”, *Матем. заметки*, **114**:3 (2023), 435–446; англ. пер.:M. Sh. Shabozov, “On the best simultaneous approximation in the Bergman space B_2”, *Math. Notes*, **114**:3 (2023), 377–386.

[13] М. Ш. Шабозов, О. Ш. Шабозов, “О наилучшем приближении некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана $\mathfrak{B}_{2,\gamma}$”, *ДАН*, **412**:4 (2007), 466–469; англ. пер.:M. Sh. Shabozov, O. Sh. Shabozov, “On the best approximation of some classes of analytic functions in weighted Bergman spaces”, *Doklady Mathematics*, **75**:1 (2007), 97–100.

[14] С. Б. Вакарчук, “Оценки значений n-поперечников классов аналитических функций в весовых пространствах $H_{2,\gamma}(D)$”, *Матем. заметки*, **108**:6 (2020), 803–822; англ. пер.:S. B. Vakarchuk, “Estimates of the values of n-widths of classes of analytic functions in the weight spaces $H_{2,\gamma}(D)$”, *Math. Notes*, **108**:6 (2020), 775–790.

[15] М. Ш. Шабозов, М. С. Саидусайнов, “Среднеквадратическое приближение некоторых классов функций комплексного переменного рядами Фурье в весовом пространстве Бергмана $B_{2,\gamma}$”, *Чебышевский сборник*, **23**:1 (2022), 167–182. [M. Sh. Shabozov, M. S. Saidusainov, “Mean-squared approximation of some classes of complex variable functions by Fourier series in the weighted Bergman space $B_{2,\gamma}$”, *Chebyshevskii sb.*, **23**:1 (2022), 167–182 (In Russian)].

[16] М. Р. Лангаршоев, “Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана $B_{2,\gamma}$”, *Вестник российских университетов. Математика*, **28**:142 (2023), 182–192. [M. R. Langarshoev, “The best approximation and the values of the widths of some classes of analytical functions in the weighted Bergman space $B_{2,\gamma}$”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:142 (2023), 182–192 (In Russian)].

[17] К. В. Руновский, “О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах $L_p, 0 < p < 1$”, *Матем. сборник*, **185**:8 (1994), 81–102; англ. пер.:K. V. Runovskii, “On approximation by families of linear polynomial operators in L_p-spaces, $0 < p < 1$”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **82**:2 (1995), 441–459.

[18] С. Б. Вакарчук, В. И. Забутная, “Точное неравенства типа Джексона–Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов”, *Матем. заметки*, **86**:3 (2009), 328–336; англ. пер.:S. B. Vakarchuk, V. I. Zabutnaya, “A sharp inequality of Jackson–Stechkin type in L_2 and the widths of functional classes”, *Math. Notes*, **86**:3 (2009), 306–313.

[19] М. Абрамовица, И. Стигана, *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами*, Наука, М., 1979. [M. Abramovica, I. Stigana, *Special Functions Reference with Formulas, Graphs and Tables*, Nauka Publ., Moscow, 1979 (In Russian)].

[20] Л. В. Тайков, "Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2", *Матем. заметки*, **20**:3 (1976), 433–438; англ. пер.:L. V. Taikov, "Inequalities containing best approximations and the modulus of continuity of functions in L_2", *Math. Notes*, **20**:3 (1976), 797–800.

[21] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, МГУ, М., 1976. [V. M. Tikhomirov, *Some Questions of Approximation Theory*, Moscow State University Publ., Moscow, 1976 (In Russian)].

[22] М. Р. Лангаршоев, "Точные неравенства типа Джексона–Стечкина и значения поперечников некоторых классов функций в пространстве L_2", *Модел. и анализ информ. систем*, **20**:5 (2013), 90–105. [M. R. Langarshoev, "The Exact Inequalities of Jackson–Stechkin Type and the Width Values for Some Classes of Functions in L_2 Space", *Model. Anal. Inform. Sist.*, **20**:5 (2013), 90–105 (In Russian)].

Информация об авторе

Лангаршоев Мухтор Рамазонович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Академия гражданской защиты МЧС России, г. Химки, Российская Федерация. E-mail: mukhtor77@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3278-4781

Поступила в редакцию 06.11.2023 г.
Поступила после рецензирования 01.03.2024 г.
Принята к публикации 11.03.2024 г.

Information about the author

Mukhtor R. Langarshoev, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, Civil Defence Academy of EMERCOM of Russia, Khimki, Russian Federation. E-mail: mukhtor77@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3278-4781

Received 06.11.2023
Reviewed 01.03.2024
Accepted for press 11.03.2024